On rappelle la définition de la convergence d' une suite :

La suite (u_n) converge vers l ssi $\forall$ ε > 0 , $\exists\, n_0 \in \boldsymbol{N}$ tel que

n $\geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |u_n - l| \leq$ ε

EXERCICE 1

Soit (u_n) une suite d' entiers naturels qui converge , montrer que la suite (u_n)

Est stationnaire à partir d' un certain rang

EXERCICE 2

Soit a < b et les suites (u_n) et (v_n) définies par :

u_0 = a $\quad v_0$ = b $\quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}\, v_n}$

Montrer que les suites convergent vers une limite commune et exprimer cette

Limite à l' aide de l' unique réel α ∈ $]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,[$ tel que cos α $= \frac{a}{b}$

EXERCICE 3

Pour tout entier n strictement positif , on considère le polynôme :

P_n(x) = $x^n + x^{n-1}$ + ... + x - 1

1) Montrer que le polynôme P_n admet une unique racine positive α_n

2) Montrer que $\forall$ n $\in \boldsymbol{N}^*$ $\quad P_n(\alpha_{n+1}) < 0$, En déduire le sens de variation de la

Suite (α_n) et démontrer qu' elle converge

3) Simplifier l' expression de P_n(x) pour x ≠ 1 et en déduire la limite de la suite (α_n)