TS **APPROFONDISSEMENT** feuille 14

1) THEOREME DE ROLLE

a < b

On admet le résultat suivant : si f est continue sur l' intervalle [a , b] alors

L' image de l' intervalle [a , b] par f est un intervalle [m , M] . les bornes m et M sont atteintes

Soit f une fonction continue sur l' intervalle [a , b] et dérivable sur l' intervalle]a , b [

Avec f(a) = f(b)

Montrer qu' il existe c appartenant à l' intervalle]a , b [tel que f'(c) = 0

Application

Soit P un polynôme de degré n avec n≥ 2 à coefficients réels

Montrer que si P est scindé son polynôme dérivé P' est aussi scindé

Un polynôme est scindé si P = $\lambda\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{m_i}$ où les a_i sont les racines distinctes

De P

2) Theoreme des accroissement finis

Soit f une fonction continue sur l' intervalle [a , b] et dérivable sur l' intervalle]a , b [

montrer que : ∃ c ∈]a , b [tel que f'(c) = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Application théorème du point fixe pour les suites récurrentes

Soit f une fonction dérivable de [a,b] dans [a,b] telle que ∃ k < 1 (k > 0)

tel que ∀ x ∈ [a,b] | f'(x) | ≤ k

a) Démontrer que f est k-lipschitzienne sur [a,b]

b) Démontrer que l' équation f(x) = x admet une unique solution dans l' intervalle [a,b]

soit α cette solution

c) Soit (u_n) une suite définie par u_0 ∈ [a,b] et ∀ n ∈ $\boldsymbol{N}$ u_{n+1} = f(u_n)

démontrer que la suite (u_n) converge vers α

d) démontrer que les suites définies ci-dessous par récurrence convergent quel que soit u_0

i) $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}\sin(u_n)$ ii) $u_{n+1} = \cos(u_n)$