On rappelle que si f est strictement monotone et continue sur I alors f est une bijection De I sur f(I)

1) Soit f une bijection d' un intervalle I sur un intervalle J et f^{-1} sa bijection réciproque

Soit x_0 un réel de I et y_0 = f(x_0) . On suppose que f est dérivable en x_0

Et que f'(x_0) $\neq 0$

Montrer que f^{-1} est dérivable en y_0 et que $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$

2) <u>applications</u>

a) soit f la restriction de la fonction sinus à l' intervalle $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$

montrer que f est une bijection de $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ sur [-1 ; 1]

la bijection réciproque f^{-1} est la fonction Arc sinus

∀ x ∈ [-1 , 1] Arcsin x est l' unique élément de $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ qui a pour sinus x :

. y = Arcsin x $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

Montrer que (Arcsin)' (x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ∀ x ∈] -1 ; 1 [

b)) soit g la restriction de la fonction cosinus à l' intervalle [0; π]

montrer que g est une bijection de [0; π] sur [-1 ; 1]

la bijection réciproque g^{-1} est la fonction Arc cosinus

∀ x ∈ [-1 , 1] Arccos x est l' unique élément de [0; π] qui a pour cosinus x :

. y = Arccos x $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0; \pi] \end{cases}$

Montrer que (Arccos)' (x) = - $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ∀ x ∈] -1 ; 1 [

Montrer que ∀ x ∈ [-1 ; 1] Arcsin x + Arccos x = $\frac{\pi}{2}$

c) soit h la restriction de la fonction tangente à l' intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

montrer que h est une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur ***R***

la bijection réciproque h^{-1} est la fonction Arc tangente

$\forall$ x $\in$ ***R*** Arctan x est l' unique élément de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ qui a pour tangente x :

. y = Arcstan x $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\end{cases}$

Montrer que (Arctan)' (x) = $\frac{1}{1+x^2}$ $\forall$ x $\in$ ***R***

Montrer que $\forall$ x > 0 arctan x + arctan($\frac{1}{x}$) = $\frac{\pi}{2}$

Et que $\forall$ x < 0 arctan x + arctan($\frac{1}{x}$) = - $\frac{\pi}{2}$

d) la fonction sinus hyperbolique est définie est définie sur ***R*** par

sh x = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$. montrer que la fonction sh est une bijection de ***R*** sur ***R***

la bijection réciproque est notée argsh

montrer que argsh x = ln (x + $\sqrt{x^2+1}$) et que (argsh)'(x) = $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

e)) la fonction cosinus hyperbolique est définie est définie sur ***R*** par

ch x = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$. montrer que la restriction de la fonction ch à $\boldsymbol{R}_+$ est une bijection de $\boldsymbol{R}_+$

sur [1 ; +∞ [

la bijection réciproque est notée argch

montrer que $\forall$ x $\in$ [1 ; +∞ [argch x = ln (x + $\sqrt{x^2-1}$) et que (argch)'(x) = $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

f) la fonction tangente hyperbolique est définie est définie sur ***R*** par

th x = $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. montrer que la fonction th est une bijection de ***R*** sur]-1 ; 1 [

la bijection réciproque est notée argth

montrer que $\forall$ x $\in$]-1 ; 1 [argth x = $\frac{1}{2}$ln ($\frac{1+x}{1-x}$) et que (argth)'(x) = $\frac{1}{1-x^2}$