

PROBLÈME (11 points) commun à tous les candidats

Partie A - Étude de fonctions

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur \mathbb{R} par :

$$f_1(x) = (x + 1)e^{-x} ; f_2(x) = -xe^{-x} ; f_3(x) = (x - 1)e^{-x}.$$

On appelle $(C_1), (C_2), (C_3)$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Les courbes $(C_2), (C_3)$ sont données dans l'annexe ci-jointe.

1. Étude de la fonction f_1

a) Calculer la dérivée f'_1 de f_1 et étudier son signe. En déduire les variations de f_1 .

(0,5 + 0,5 + 0,5 point)

b) Déterminer les limites de f_1 en $+\infty$, en $-\infty$.

(0,5 + 0,25 point)

c) Dresser le tableau de variation de f_1 .

(0,25 point)

2. Étude graphique

a) Identifier sur l'annexe les courbes (C_2) et (C_3) et placer sur le dessin le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

(0,5 point)

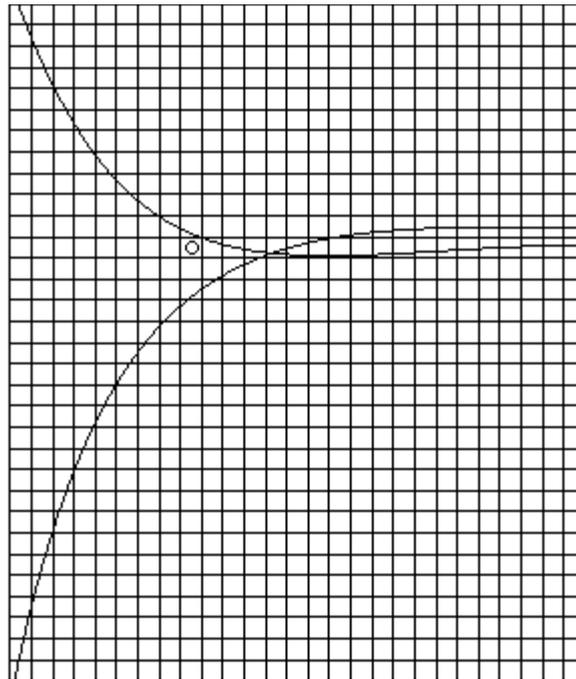
b) Étudier la position relative des courbes (C_1) et (C_3) .

(0,5 point)

c) Tracer (C_1) dans le même repère que (C_2) et (C_3) (sur l'annexe).

(0,5 point)

Annexe



3. Étude d'équations différentielles

(Ce type de question (sauf a)) n'est plus au programme à partir de la session 1999.)

a) Montrer que f_1 est solution de l'équation différentielle

$(E_1) : y' + y = e^{-x}.$ (0,5 point)

b) Montrer que f_1 est aussi solution de l'équation différentielle

$(E_2) : y'' + 2y' + y = 0.$ (0,5 point)

c) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_2) . En déduire que f_2 et f_3 sont aussi des solutions de (E_2) . (1,5 point)

d) Parmi les solutions de (E_2) , quelles sont celles qui sont aussi solutions de (E_1) ? (0,5 point)

Partie B - Étude d'aires liées à (C_1) et (C_3)

Pour n entier strictement positif, on appelle M_n le point de (C_3) d'abscisse $n \ln 2$.

On pose $f(x) = f_1(x) - f_3(x)$ pour tout x réel.

1. Calculer, en unités d'aire, l'aire U_n du domaine plan limité par la courbe (C_3) , la courbe (C_1) et les segments $[M_n P_n]$ et $[M_{n+1} P_{n+1}]$ pour $n > 0$. (P_n et P_{n+1} sont les projections orthogonales respectives de M_n et M_{n+1} sur $(O; \vec{i})$) (1,5 point)
2. Calculer, en unités d'aire, l'aire V_n du trapèze $P_n M_n M_{n+1} P_{n+1}$ pour $n > 0$. Montrer que le rapport $\frac{V_n}{U_n}$ est constant. (1 +