TS **APPROFONDISSEMENT** feuille 1

PARTIE A : <u>inégalité des accroissements finis</u>

1) Soit f une fonction dérivable sur l' intervalle [a ; b] , on suppose qu' il existe

Deux réels m et M tels que $\forall$ x $\in$ [a ; b] : m $\leq$ f ' (x) $\leq$ M

Démontrer que : m(b –a) $\leq$ f(b) – f(a) $\leq$ M(b – a)

Pour cela on utilisera les fonctions g et h définies sur [a ; b]

g(x) = f(x) – f(a) - m (x – a) et h(x) = = f(x) – f(a) - M (x – a)

2) Soit f une fonction dérivable sur l' intervalle [a ; b] , on suppose qu' il existe un réel k > 0

Tel que $\forall$ x $\in$ [a ; b] $|\ f'(x)\ | \leq$ k

Démontrer que : $|\ f(b) - f(a)\ | \leq$ k$|b-a|$

PARTIE B <u>étude d' une suite</u>

Soit (u_n) la suite définie par u_0 = 0 et $\forall$ n $\in N$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞ [par f(x) = = $\sqrt{3x+4}$

1) Tracer dans un repère orthonormé (O , $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) la courbe Cf et la droite d'équation y = x

Construire les premiers termes de la suite (u_n) , conjecturer le comportement de (u_n)

2) montrer que si x $\in$ [0 ; 4] alors f(x) $\in$ [0 ; 4]

3) montrer que $\forall$ n $\in N$, u_n $\in$ [0 ; 4]

4) montrer que $\forall \in$ [0 ; 4] $|\ f'(x)\ | \leq \frac{3}{4}$

5) résoudre sur [0 ; +∞ [l' équation f(x) = x

6) montrer que $\forall$ n $\in N$ $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|$ (utiliser l' inégalité des accroissement finis)

7) montrer que $\forall$ n $\in N$ $|u_n - 4| \leq (\frac{3}{4})^n\,|u_0 - 4|$

8) conclure