PROBLEME *(10 points)* commun à tous les candidats

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

1. Déterminer les fonctions définies sur R solutions de l'équation différentielle (E_1) :

$$y'' + 2y' + y = 0.$$ (0,5 point)

2. On considère l'équation différentielle (E_2) :

$$y'' + 2y' + y = x + 3.$$

a) Vérifier que la fonction p définie sur R par $p(x) = x + 1$ est solution de (E_2).

(0,25 point)

b) Démontrer qu'une fonction g est solution de (E_2) si, et seulement si, la fonction $g - p$ est solution de (E_1). (0,5 point)

c) Déduire de **1.** et de **2.***b*) toutes les solutions de (E_2). (0,5 point)

d) Déterminer la solution de (E_2) qui vérifie :

$g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$. (0,25 point)

(Ce type de question n'est plus au programme à partir de la session de 1999.)

Partie B - Étude d'une fonction *f* et courbe représentative

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + xe^{-x}.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. *a*) f' et f'' désignant respectivement les dérivées première et seconde de f, calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$. (0,5 point)

b) Étudier le sens de variation de la dérivée f'. (0,5 point)

c) Démontrer que, pour tout réel x positif, $f'(x) > 0$. (0,25 point)

d) Calculer la limite de f en $+\infty$**.** (0,25 point)

e) Dresser le tableau de variation de la fonction f. (0,25 point)

2. *a*) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) et préciser la position relative de (D) et (C). (0,75 point)

b) La courbe (C) admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D).

Déterminer les coordonnées de A. (0,25 point)

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet sur $[0\,;+\infty\,[$ une unique solution notée α, puis vérifier que $0 < \alpha < 1$. (0,5 point)

4. *a*) Construire la droite (D), le point A défini au **2.***b*), la courbe (C) et la tangente en A à la courbe (C). (0,5 point) *b*) Donner par lecture graphique une valeur approchée de α. (0,25 point)

Partie C - Recherche d'une approximation décimale de α

1. Démontrer que, sur [0 ; +∞[, l'équation $f(x) = 2$ équivaut à l'équation :

$$\frac{e^x}{e^x+1} = x. \qquad \text{(0,25 point)}$$

2. On appelle h la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}.$$

a) Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] et réaliser le tableau de variation de la fonction h. (0,5 point)

b) En déduire que, pour tout réel x de [0 ; 1], $h(x)$ appartient à [0 ; 1]. (0,25 point)

c) Calculer $h''(x)$ pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] ; étudier le sens de variation de h'. (0,5 point)

d) En déduire que, pour tout réel x de [0 ; 1], $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$. (0,25 point)

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle [0 ; 1].

(0,5 point)

b) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ (0,5 point)

c) En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers α. (0,75 point)

d) Déterminer un entier *p* tel que u_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α et, à l'aide de la calculatrice, proposer une approximation décimale de u_p à 10^{-6} près. Que peut-on en déduire pour α ?