Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles–Guyane
13 septembre 2012

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

$\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormal de l'espace.

On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t\\ y &=& -t \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}.\\ z &=& 2t\end{array}\right.$

Soit $\mathcal{P}$ le plan défini par l'équation $x+y+2z-1=0$.

Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\text{B}(1~;~-1~;~0)$ et de rayon 1.

Pour chacune des phrases ci-dessous, une seule des trois propositions est exacte. Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse en justifiant soigneusement votre choix.

Il est attribué pour chaque question $0,5$ *point si la réponse est exacte et* $0,5$ *point si la justification est correcte.*

1. La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont :
   a. parallèles ;
   b. perpendiculaires ;
   c. non parallèles et non perpendiculaires.
2. Soit $\mathcal{P}'$ le plan contenant la droite $\mathcal{D}$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}'$ admet pour équation cartésienne :
   a. $-2y+z+2=0$;
   b. $2x-z=0$;
   c. $x-y-z=0$.
3. La droite Δ, intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan d'équation $2x-z=0$, admet pour représentation paramétrique :
   a. $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t\\ y &=& -3t+1 \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}.~;\\ z &=& 2t\end{array}\right.$
   b. $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t\\ y &=& -t \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}.~;\\ z &=& 2t\end{array}\right.$
   c. $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t\\ y &=& -5t+1 \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}..\\ z &=& 2t\end{array}\right.$
4. L'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$ est :
   a. un point ;
   b. l'ensemble vide ;
   c. un cercle.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = \sqrt{3} + \mathrm{i} \quad ; \quad z_{\mathrm{B}} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_{\mathrm{C}} = -1 - 3\mathrm{i}.$$

On note D l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

On note E l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$.

1. **a.** Écrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.

   b. Sur une feuille de papier millimétré, en prenant pour unité graphique 2 cm, placer les points A et B et C.

   c. Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle.

2. **a.** Construire les points D et E. Calculer leurs affixes z_{D} et z_{E}.

   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ sont orthogonaux et que OE = AD.

3. Le but de cette question est de retrouver le résultat précédent dans un cas plus général. Il est inutile de refaire une figure.

   Soient A, B, C, D et E les points- d'affixes respectives non nulles z_{A}, z_{B}, z_{C}, z_{D} et z_{E} tels que
   le triangle OAB est rectangle isocèle en O avec $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;
   le triangle OCD est rectangle isocèle en O avec $\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;
   Le quadrilatère OBEC est un parallélogramme.

   a. Justifier les égalités suivantes :

   $$z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}z_{\mathrm{A}} \quad ; \quad z_{\mathrm{D}} = \mathrm{i}z_{\mathrm{C}} \quad ; \quad z_{\mathrm{E}} = \mathrm{i}z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{C}}$$

   b. Montrer que

   $$\frac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{E}}} = \mathrm{i}.$$

   c. Interpréter géométriquement $\left|\dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{E}}}\right|$ et $\arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{E}}}\right)$ puis conclure.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On tracera la figure sur une feuille de papier millimétré, en prenant pour unité graphique 1 cm.

Partie A : tracé d'une figure

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -2 - 4\mathrm{i}$; $z_{\mathrm{B}} = -6\mathrm{i}$; $z_{\mathrm{C}} = 3 - 3\mathrm{i}$.

1. Placer le point D tel que le triangle ABD est isocèle rectangle en D, avec $\left(\overrightarrow{\mathrm{DA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{DB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Construire le point E tel que le triangle OEA est isocèle rectangle en E avec $\left(\overrightarrow{\mathrm{EA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{EO}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Vérifier que l'affixe du point D est $z_{\mathrm{D}} = -4\mathrm{i}$.

Le but de l'exercice est de montrer de deux manières que les droites (ED) et (BC) sont perpendiculaires et que les distances ED et BC sont égales.

Partie B : première méthode

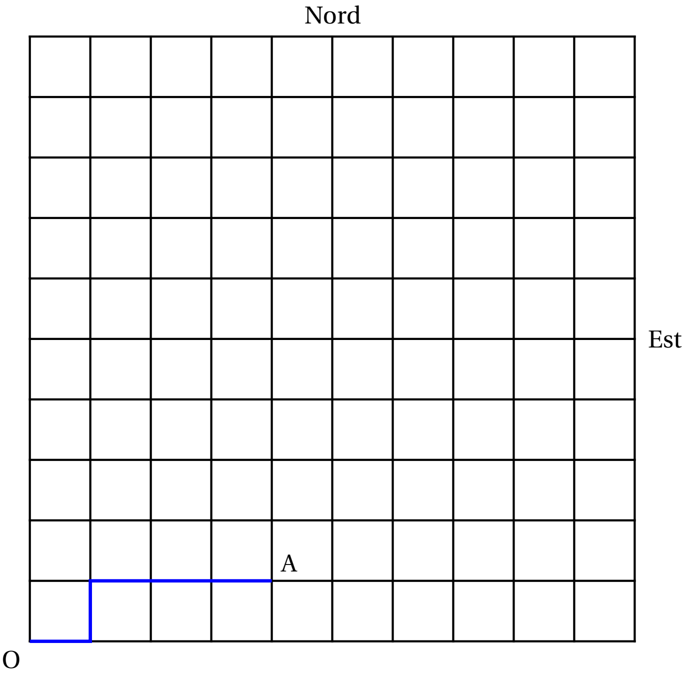
1. Soit g la similitude directe de centre A qui transforme B en D.
   - **a.** Déterminer l'angle et le rapport de la similitude g.
   - **b.** En déduire que l'écriture complexe de g est
   $$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)z - 3 - \mathrm{i}.$$
   - **c.** Justifier que le point E est l'image du point O par la similitude g.
   - **d.** En déduire l'affixe du point E.
2. Calculer le module et un argument de $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{D}}}$ et conclure pour le problème posé.

Partie C : deuxième méthode

1. On considère la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   Quelle est l'image du point O par cette rotation ? Justifier la réponse.
   En déduire la nature du triangle OBC.
2. Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.
   Soit h la similitude directe de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   - **a.** Donner l'angle et le rapport de la similitude $h \circ f$.
   - **b.** Quelle est l'image de la droite (BC) par $h \circ f$? Justifier.
   - **c.** Conclure pour le problème posé.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les rues d'une ville nouvelle sont structurées de telle sorte que les pâtés de maisons sont des carrés superposables et les rues sont toutes parallèles ou perpendiculaires. On identifie le plan de la ville au quadrillage d'un carré de 10 unités sur 10 dans lequel on se repère avec des points à coordonnées entières qui correspondent aux carrefours :



Le point O a pour coordonnées $(0\,;0)$, le point A a pour coordonnées $(4\,;1)$.
On s'intéresse aux chemins partant de O et arrivant à un autre point M de coordonnées $(p\,;\ q)$ où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant 10$ et $q \leqslant 10$.

À chaque intersection, on ne peut aller que vers le nord (N) ou vers l'est (E).

Dans tout l'exercice, on décrit un chemin à l'aide d'un mot composé successivement des lettres N ou E qui indiquent dans l'ordre la direction à suivre à chaque intersection.
On appelle *longueur* d'un chemin le nombre de lettres employées pour le décrire.
Par exemple :
Pour se rendre en A, on peut suivre par exemple les chemins NEEEE ou ENEEE (marqué en gras sur la figure) ; ces deux chemins ont une longueur égale à 5.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A - Dénombrement

1. Donner la liste de tous les chemins permettant de se rendre en A.
2. Soit M un point de coordonnées $(p;q)$ où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant 10$ et $q \leqslant 10$.
   Exprimer, en fonction de p et q, la longueur des chemins qui permettent d'arriver en M.
3. Montrer qu'il y a $\binom{p+q}{p}$ chemins différents qui permettent d'arriver en M.
4. Dénombrer les chemins pour arriver au point C de coordonnées $(7\,;5)$.
5. Dénombrer les chemins pour arriver en C en passant par A.

Partie B - Étude d'une variable aléatoire

Tous les chemins considérés dans la suite de l'exercice vérifient les deux propriétés suivantes :
ils sont de longueur 5 ;
un promeneur part de O et à chaque intersection la probabilité qu'il aille vers le Nord est de $\frac{2}{3}$ (et donc de $\frac{1}{3}$ vers l'Est), indépendamment de son choix précédent.
On appelle X la variable aléatoire qui à tout chemin suivi par le promeneur associe le nombre de fois où il va vers le Nord.

1. Énumérer, en donnant la liste de leurs coordonnées, tous les points sur lesquels peut aboutir un chemin.
2. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
3. Calculer la probabilité que le promeneur arrive en A.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.
3. En déduire que si $x \geqslant \text{e}$ alors $f(x) \geqslant \text{e}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 5 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.
   Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant \text{e}$.
   b. Déterminer les variations de la suite (u_n).
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   d. Déterminer sa limite ℓ.
3. On donne l'algorithme suivant :

```
X est une variable réelle ; Y est une variable entière
Affecter 5 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,72
    Faire
        Affecter (X/ln X) à X
        Affecter Y + 1 à Y
Fin de Tant que
Afficher Y
```

   À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	3,106 674 672 8	2,740 652 532 3	2,718 372 634 6	2,718 281 830 01	2,718 281 828 5

ANNEXE

Exercice 4

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie