Baccalauréat S Antilles-Guyane
19 juin 2012

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Les parties B et C sont indépendantes.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0.$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Partie C : calcul d'aire

Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Construire sur ce graphique la droite Δ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite Δ. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$ la droite Δ, la droite d'équation $(x = 1)$ et l'axe des ordonnées.
2. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\mathrm{I} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm.
On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1+2\text{i} \quad ; \quad b = -2-\text{i} \quad ; \quad c = -3+\text{i}.$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.
2. Calculer $\dfrac{b}{a}$, en déduire la nature du triangle OAB.
3. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z \neq b$, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z+1-2\text{i}}{z+2+\text{i}}$$

   a. Calculer l'affixe c' du point C$'$, image de C par f et placer le point C$'$ sur la figure.

   b. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z avec $z \neq b$, tels que $|z'| = 1$.

   c. Justifier que $\mathcal{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathcal{E}$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On appelle J l'image du point A par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   On appelle K l'image du point C par la rotation r' de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   On note L le milieu de [JK].
   Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\left\{\begin{array}{l c l} u_1 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{n+1}{2n}u_n \end{array}\right.$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln 2$.
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.

1. Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.

   On choisit, au hasard, un élève du lycée.

   Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?
2. Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément.

   Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair ? 3.
3. Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\dfrac{1}{5}$.

   Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3}.
4. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.

   On appelle A l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'évènement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».

   On suppose que les évènements A et F sont indépendants.

   On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à $0,02$ et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à $0,069$.

   On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?
5. On considère l'algorithme :

```
A et C sont des entiers naturels,
C prend la valeur 0
Répéter 9 fois
        A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
                Si A > 5 alors C prend la valeur de C + 1
                Fin Si
Fin répéter
Afficher C.
```

   Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.

   Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les quatre questions sont indépendantes.

1. a. Vérifier que le couple (4 ; 6) est une solution de l'équation

$$\text{(E)} \qquad 11x - 5y = 14.$$

b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x ; y) vérifiant l'équation (E).

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$2^{3n} \equiv 1 \qquad (\text{mod } 7).$$

b. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.

3. On se place dans le plan complexe. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3}{2}(1-\mathrm{i})z + 4 - 2\mathrm{i}.$$

4.

5. On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\dfrac{\text{A}}{\text{N}}\right)$ désigne la partie entière de $\dfrac{\text{A}}{\text{N}}$.

```
A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que N ⩽ √A
        Si A/N − Ent(A/N) = 0 alors Afficher N et A/N
        Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.
```

Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?

Que donne cet algorithme dans le cas général ?

ANNEXE 1
Exercice 1
À rendre avec la copie

Courbe $\mathscr{C}$ représentative de f