

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{7}{u_n} \right)$

(†).

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{7}{x} \right)$.

Démontrer que la fonction f admet un minimum. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n > \sqrt{7}$.

2. a. Soit n un entier naturel quelconque. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

c. On déduit de la relation (†) que la limite L de cette suite est telle que $L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{1}{L} \right)$. Déterminer L .

3. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par : $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n^2$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

b. Voici un algorithme :

Variables	n et p sont des entiers naturels, d est un réel.
Entrée	Demander à l'utilisateur la valeur de p .
Initialisations	Affecter à d la valeur 1. Affecter à n la valeur 0.
Traitement	Tant que $d > 10^{-p}$. Affecter à d la valeur $0,5d^2$ Affecter à n la valeur $n + 1$. Fin tant que
Sortie	Afficher n .

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5. Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?

Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.