Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par *f* la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1. Déterminer la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout réel *x* de l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Dresser le tableau de variation de la fonction *f*. En déduire le signe de la fonction *f* sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par $u_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables	*i* et *n* sont des entiers naturels *u* est un réel
Entrée	Demander à l'utilisateur la valeur de *n*
Initialisation	Affecter à *u* la valeur 0
Traitement	Pour *i* variant de 1 à *n* Affecter à *u* la valeur $u+\dfrac{1}{i}$
Sortie	Afficher *u*

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur *n* = 3.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de *n*.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite $\left(u_n\right)$ telle que pour tout entier strictement positif *n*, $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$.

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif *n*, $u_{n+1} - u_n = f\left(n\right)$ où *f* est la fonction définie dans la partie A. En déduire le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.

2. a. Soit *k* un entier strictement positif. Justifier l'inégalité $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right)dx \geq 0$.

En déduire que $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$. Démontrer l'inégalité $\ln\left(k+1\right) - \ln\left(k\right) \leq \frac{1}{k}$ (**1**).

b. Écrire l'inégalité (**1**) en remplaçant successivement *k* par 1, 2, . . . , *n* et démontrer que pour tout entier strictement positif *n*, $\ln\left(n+1\right) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

c. En déduire que pour tout entier strictement positif *n*, $u_n > 0$.

3. Prouver que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite