1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictemenl positif non nul b ($b > a$) Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANTQUE $n < N$ Affecter à n la valeur n +1 Affecter à u la valeur $\frac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour

$a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$.

Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}.$$

2\. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{v_n - u_n}{2}\right)^2$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq v_n$.

3\. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4\. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes