On considère la suite $(I_n)$ définie pour *n* entier naturel non nul par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

1. a. Soit *g* la fonction définie sur ***N*** par $g(x) = xe^{x^2}$.

Démontrer que la fonction *G* définie sur ***R*** par $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur ***R*** de la fonction *g*.

b. En déduire la valeur de $I_1$.

c. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier *n,* supérieur ou égal à 1, on a : $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$.

d. Calculer $I_3$ et $I_5$.

2. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Initialisation | Affecter à *n* la valeur 1<br>Affecter à *u* la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$ |
| Traitement | Tant que $n < 21$<br>Affecter à *u* la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}$<br>Affecter à *n* la valeur $n + 2$ |
| Sortie | Afficher *u* |

Quel terme de la suite $(I_n)$ obtient-on en sortie de cet algorithme ?

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul *n,* $I_n > 0$.

b. Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante.

c. En déduire que la suite $(I_n)$ est convergente. On note *L* sa limite.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la valeur de *L*.