Partie A. Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$. On note X sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit *g* la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

Montrer que la fonction *g* est positive sur $[1\,;+\infty[$.

2. a. Montrer que, pour tout *x* de $[1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. En déduire le sens de variation de *f* sur $[1\,;+\infty[$.

c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe X.

d. Étudier la position de la courbe X par rapport à la droite Δ.

3. Pour tout entier naturel *k* supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse *k* de X et Δ.

a. Montrer que, pour tout entier naturel *k* supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln k}{k}$.

b. Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieur ou égale à 10^{-2}.