

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x.$$

1.
 - a. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0 ; +\infty[$.
 - b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
 - c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a

$$f(x) = x \left(5 \frac{\ln x}{x} - 1 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right).$$

- d. En déduire la limite de f en $+\infty$.
 - e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On notera α cette solution.
 - b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14 ; 15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
 - c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= 5\ln(u_n + 3) \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n \neq 0$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

2.
 - a. Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
 - b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.
 - c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq \alpha$.

Démontrer que la suite u est croissante

- e. En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

u prend la valeur 4 Répéter Tant que $u - 14,2 < 0$ u prend la valeur de $5\ln(u + 3)$ Fin du Tant que Afficher u
--

- a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Justifier que cet algorithme se termine.
- b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).