

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

- a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n .
 - b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1; e]$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.
- a. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0; 1)$ et le point B_n de coordonnées $(n; 0)$.
 - b. Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 .
 - c. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n .
 - d. Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n) .
3. a. Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n .
- b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.
 - c. Dédire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n) .
 - d. Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Établir que : $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ .
4. On désigne par $\mathcal{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = e$.
- a. Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à $\frac{\alpha_n^2}{n}$.
 - b. Établir que :

$$(e - \alpha_n) \ln \alpha_n \leq \frac{\alpha_n^2}{n} \leq (e - \alpha_n).$$

- c. En déduire un encadrement de $n(e - \alpha_n)$.
- d. La suite de terme général $n(e - \alpha_n)$ est-elle convergente ? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n) ?