

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  le nombre d'abonnés à son profil en l'année  $(2020 + n)$ , suivant cette modélisation. Ainsi  $u_0 = 1\,000$ .

1. Calculer  $u_1$ .
2. Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$ .
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

```
def suite( n ) :  
    u = 1 000  
    for i in range(n) :  
        u = 0,9*u + 250  
    return u
```

4.
  - a. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 2\,500$ .
  - b. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
  - c. Dédurre des questions précédentes que la suite  $(u_n)$  est convergente.
5. Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = u_n - 2\,500$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial  $v_0 = -1\,500$ .
  - b. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  et montrer que :

$$u_n = -1\,500 \times 0,9^n + 2\,500.$$

- c. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  et interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.  
Déterminer cette année.
-