

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.

Elle sort les gâteaux du congélateur à $-19\text{ }^{\circ}\text{C}$ et les apporte sur la terrasse où la température est de $25\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1,3\text{ }^{\circ}\text{C}$.

I – Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante c'est-à-dire que l'augmentation de la température est la même minute après minute.

Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.

Ce modèle semble-t-il pertinent?

II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur; ainsi $T_0 = -19$.

On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante

$$\text{Pour tout entier naturel } n, T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25).$$

1. Justifier que, pour tout entier n , on a $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$
2. Calculer T_1 et T_2 . On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $T_n \leq 25$.
En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible?
4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n) .
5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.
6. On pose pour tout entier naturel n , $U_n = T_n - 25$.
 - a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0 .
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$.
 - c. En déduire la limite de la suite (T_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
7.
 - a. Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur.
Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
 - b. Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de $10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.