

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  par :

$$\begin{cases} u_0 &= v_0 = 1 \\ u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  **sont strictement positives**.

1.
  - a. Calculez  $u_1$  et  $v_1$ .
  - b. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n \geq 1$ .
  - c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq n + 1$ .
  - d. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
2. On pose, pour tout entier naturel  $n$  :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

- a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}.$$

- b. En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

- c. Déterminer la limite de la suite  $(r_n^2)$  et en déduire que  $(r_n)$  converge vers  $\sqrt{2}$ .  
d. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

- e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :  
    n = 0  
    r = 1  
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :  
        r = (2+r)/(1+r)  
        n = n+1  
    return n
```

(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et  $10^{**(-4)}$  représente  $10^{-4}$ ).

La valeur de  $n$  renvoyée par ce programme est 5.

À quoi correspond-elle?