

**Principaux domaines abordés : Suites numériques; raisonnement par récurrence; suites géométriques.**

La suite  $(u_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs,  $u_1$  et  $u_2$  sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

	A	B
1	$n$	$u_n$
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. a. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de  $(u_n)$  dans la colonne B?  
 b. Conjecturer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $n \leq u_n \leq n + 1$ .  
 b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite  $(u_n)$ .  
 c. Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. On désigne par  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - n$
- a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{3}{4}$ .  
 b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$ .