

EXERCICE 4**6 points****Commun à tous les candidats**

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1).$$

- Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
 - Déterminer la dérivée de f_1 .
 - Dresser le tableau de variations de f_1 .
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n , définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2 + 1)}{n}.$$

- Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
 - Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
 - Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0; +\infty[$.
 - Justifier que, pour tout entier naturel n , $0 < \alpha_n < 1$.
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.
4. Étude de la suite (α_n)
- Montrer que la suite (α_n) est croissante.
 - En déduire qu'elle est convergente.
 - Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.