

**EXERCICE 2****4 points****Commun à tous les candidats**

Soit  $a$  un nombre réel tel que  $-1 < a < 0$ .

On considère la suite  $u$  définie par  $u_0 = a$ , et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

1. Étudier la monotonie de la suite  $u$ .
2. a. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = x^2 + x$ . Étudier le sens de variations de la fonction  $h$ .  
En déduire que pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $] -1 ; 0[$ , le nombre  $h(x)$  appartient aussi à l'intervalle  $] -1 ; 0[$ .  
b. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $-1 < u_n < 0$ .
3. Étudier la convergence de la suite  $u$ . Déterminer, si elle existe, sa limite.