EXERCICE 1 **5 points**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. **a.** Démontrer que pour tout $n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 0$.

   b. En déduire que pour tout $n \geqslant 4,\ u_n \geqslant n - 2$.

   c. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On définit ia suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.

   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

   b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

   c. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

   d. En déduire l'expression de $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.