

**EXERCICE 2 7 points****Thèmes : Fonction logarithme et suite**Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = x \ln(x) + 1$$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en 0 ainsi que sa limite en  $+\infty$ .
2. a. On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on notera  $f'$  sa fonction dérivée.  
Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

- b. En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ . On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  et les limites.
- c. Justifier que pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $f(x) \in ]0; 1[$ .
3. a. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1.  
b. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .  
c. En déduire que pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$f(x) \geq x$$

4. On définit la suite  $(u_n)$  par son premier terme  $u_0$  élément de l'intervalle  $]0; 1[$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 < u_n < 1$ .
- b. Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite  $(u_n)$ .
- c. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.