

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie. L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n -ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1 , de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \leq u_{n+1} < 6$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
 - c. Déterminer la valeur de ℓ . Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 6 - u_n$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.
 - b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .
 - c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.
Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.