

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1^{er} juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n) . Selon ce modèle, pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année 2017 + n . On a donc $u_0 = 3000$.

- Justifier que $u_1 = 2926$.
- Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.
- À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n) . Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1520$.
 - Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
- On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 1520$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
 - En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.
 - Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```

n ← 0
u ← 3000
Tant que ...
    n ← ...
    u ← ...
Fin de Tant que
  
```

La notation « $\leftarrow$ » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

- La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.