d'après bac S, septembre 2012

On considère la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout n, $u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$. On appelle f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout n, $u_n > 0$.

1. Démontrer que f admet un minimum égal à $\sqrt{5}$.
2. En déduire que pour tout n, $u_n \geq \sqrt{5}$.
3. Démontrer que la suite (u_n) décroissante.
4. Démontrer que la suite (u_n) admet une limite que l'on nommera l.
5. Démontrer que, pour tout n, $u_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{\left(u_n - \sqrt{5}\right)^2}{2u_n}$.
6. On définit la suite (v_n) par $v_0 = 1$ et pour tout n, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n^2$. Démontrer par récurrence que, pour tout n, $v_n \leq \frac{1}{2^n}$. En déduire la limite de (v_n)
7. Démontrer par récurrence que pour tout n, $u_n - \sqrt{5} \leq v_n$ et en déduire la limite de (u_n)
8. On considère l'algorithme suivant :

   Variables : n, p sont des entiers naturels, v est un réel
   Début algorithme
   Lire la valeur de p
   Affecter à v la valeur 1
   Affecter à n la valeur 0
   Tant que $v > 10^{-p}$ Affecter à v la valeur $v * v/2$
   Affecter à n la valeur $n + 1$
   Fin tant que
   Afficher n

   En entrant pour p la valeur 9, l'algorithme affiche la valeur 5. Quelle en est la conséquence pour le nombre v_5 ? Que peut-on dire de la différence $u_5 - \sqrt{5}$?