# Divisibilité - Division euclidienne

## I Ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

L'ensemble des entiers $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... \}$ est appelé ensemble des entiers naturels et noté $\mathbb{N}$.
L'ensemble des entiers $\{... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... \}$ est appelé ensemble des entiers relatifs, il est noté $\mathbb{Z}$.

*Remarque*

$\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$ : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

*Remarque*

La somme et le produit de deux entiers naturels sont des entiers naturels.
La somme et le produit de deux entiers relatifs sont des entiers relatifs.

**Propriété** (admise)

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.

*Exemples*

Soit $A = \{ 8 ; 12 ; 14 ; 21 \}$. A est une partie de $\mathbb{N}$. Le plus petit élément de A est 8.
Soit B l'ensemble des entiers naturels impairs. B est une partie de $\mathbb{N}$. Le plus petit élément de B est 1.

*Remarque*

Une partie non vide de $\mathbb{Z}$ n'a pas nécessairement de plus petit élément.

## II Divisibilité

**Définition**

Soient a et b deux entiers relatifs.
S'il existe un entier relatif k tel que $b = k \times a$ ,
on dit que b est un multiple de a ou que a est un diviseur de b .
(on dit aussi que b est divisible par a, que a divise b, mais on ne dit jamais que b multiplie a)

*Remarque*

Pour indiquer que a divise b, on écrit parfois $a \mid b$.

*Exemple*

De l'égalité $54 = 6 \times 9$ , on peut déduire :
6 est un diviseur de 54, 9 est un diviseur de 54 (9 et 6 divisent 54),
54 est un multiple de 6, 54 est un multiple de 9.

*Remarque*

L'ensemble des multiples de 3 est l'ensemble des nombres de la forme $3 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des multiples de 3 est parfois noté $3\mathbb{Z}$ .

## Propriété

- Soient a et b deux entiers relatifs. Si a divise b et si $b \neq 0$, alors $|a|$ divise $|b|$.
- Tout entier relatif $b \neq 0$ a un nombre fini de diviseurs.

## Propriété

Soients a, b et c trois entiers relatifs. Si a divise b, alors a divise bc.

*Remarque*

On peut traduire la propriété en termes de multiples :
Si b est un multiple de a, alors bc est un multiple de a.
Tout multiple d'un multiple de a est un multiple de a.

## Propriété

Soient a, b et c trois entiers relatifs.
Si a divise b et si a divise c alors a divise $b + c$ et a divise $b - c$.
Plus généralement si a divise b et si a divise c alors a divise tout nombre de la forme $bu + cv$ où u et v sont des entiers relatifs.

*Remarque*

On peut traduire la propriété en termes de multiples :
Si b et c sont des multiples de a, alors $bu + cv$ est un multiple de a.

## Propriétés

Soient a, b, c des entiers relatifs.

- 1, -1, a, -a sont des diviseurs de a.
- Si a divise b alors -a divise b , a divise -b et -a divise -b.
- Si a divise b et si b divise a, alors $a = b$ ou $a = -b$. (c'est-à-dire que $|a| = |b|$)
- Si a divise b et si b divise c, alors a divise c.
- Si a divise b alors pour tout entier relatif c, ac divise bc.

# III Division euclidienne

## Propriété d'Archimède

Soit b un entier naturel non nul.
Pour tout entier naturel a, il existe un entier naturel n tel que $a < nb$ .

*Remarque*

Cela revient à dire que l'ensemble des multiples de b ($b \neq 0$) n'est pas majoré par a, et ceci pour tout $a \in \mathbb{N}$ .

L'ensemble des multiples de b ($b \neq 0$) n'est pas majoré.

*Exemple*

$b = 3$ ; $a = 52$ pour $n \geq 18$ , on $a < nb$.

*Rappel :* Technique de la division d'entiers naturels

Poser la division de 43 par 5.
On peut écrire $43 = 8 \times 5 + 3$.
43 s'appelle le dividende, 5 le diviseur, 8 le quotient et 3 le reste.
On a $3 < 5$, le reste doit toujours être strictement inférieur au diviseur.

$$\begin{array}{r|l} 43 & 5 \\ \hline 3 & 8 \end{array}$$

*Remarque*

Les multiples de 5 sont 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 et on choisit $40 = 8 \times 5$ car $45 > 43$.
Pour chercher le quotient d'une division, on cherche en pratique les multiples du diviseur et on choisit celui qui précède immédiatemment le multiple supérieur au dividende.

## Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ (voir démonstration 05)

Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul.
Il existe un unique couple (q ; r) d'entiers naturels tel que : $a = bq + r$ et $r < b$.
a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.
On dit que le couple unique (q ; r) est le résultat de la division euclidienne de a par b.

*Remarque*

Si $r = 0$, alors a est divisible par b.

*Exemple*

Division euclidienne de 31 par 7: $31 = 7 \times 4 + 3$

## Division euclidienne d'un entier relatif (voir démonstration 06)

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul.
Il existe un unique couple (q ; r) , $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que : $a = bq + r$ et $r < b$
a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.
On dit que le couple unique (q ; r) est le résultat de la division euclidienne de a par b.