Exercice 2 ★ On considère la suite (u_n) définie pour tout n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que $u_n \leq 3$.

Exercice 3 ★ On considère la suite (u_n) définie pour tout n par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que $u_n = 3 \times 2^n + 4$.

Exercice 4 ★ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5x + 1)^n \text{ où } n \geq 1$$

Démontrer par récurrence que $f'(x) = 5n(5x + 1)^{n-1}$

Exercice 5 ★ On considère la suite (u_n) définie pour tout n par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

On veut démontrer par récurrence que $u_n \geq 1$ pour tout $n \geq 0$.

On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$

- ❶ Déterminer la dérivée f' de f et déterminer son signe sur $[1; +\infty[$.
- ❷ En déduire les variations de f sur $[1; +\infty[$.
- ❸ En déduire que si $x \geq 1$ alors $f(x) \geq 1$.
- ❹ En utilisant les résultats précédents, démontrer par récurrence que $u_n \geq 1$.