103 Liban juin 2003

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.

2. On considère les évènements suivants :
B_n : « On tire une boule blanche lors du n-ième tirage »,
U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».

- **a.** Calculer la probabilité de l'évènement B_n.
- **b.** Exprimer la probabilit de l'évènement U_n en fonction de n.
- **c.** En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :

$$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.

- **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

- **b.** Déterminer la limite de la suite (S_n).