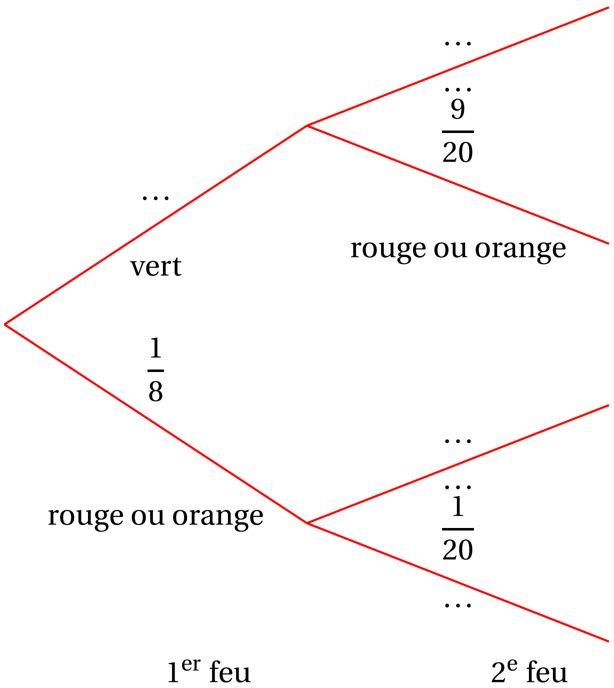
111 Asie juin 2002

Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'évènement « Amélie est arrêtée par le n-ième feu rouge ou orange » et $\overline{\mathrm{E}}_n$, l'évènement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge. Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{\mathrm{E}}_n$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\frac{1}{8}$. On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- la probabilité que le $n+1$-ième feu tricolore soit rouge ou orange, si le n-ième feu est rouge ou orange, vaut $\frac{1}{20}$.
- la probabilité que le $n+1$-ième feu tricolore soit rouge ou orange, si le n-ième feu est vert, est égale à $\frac{9}{20}$.

1. On s'intéresse, tout d'abord, aux deux premiers feux tricolores.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. On se place maintenant dans le cas général.

a. Donner les probabilités conditionnelles $p_{\mathrm{E}_n}\left(\mathrm{E}_{n+1}\right)$ et $p_{\overline{\mathrm{E}}_n}\left(\mathrm{E}_{n+1}\right)$.

b. En remarquant que $\mathrm{E}_{n+1} = \left(\mathrm{E}_{n+1} \cap \mathrm{E}_n\right) \cup \left(\mathrm{E}_{n+1} \cap \overline{\mathrm{E}}_n\right)$, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n.$$

c. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

3. Soit la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = 28p_n - 9$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.

b. Exprimer u_n, puis p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite, si elle existe, de p_n, quand n tend vers $+\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.