Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets cœurs! ».

Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3×3 sur laquelle sont placés trois cœurs répartis au hasard, comme par exemple ci-dessous.

	♥	
♥		
		♥

Le ticket est gagnant si les trois cœurs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une même colonne ou sur une même diagonale.

1. Justifier qu'il y a exactement 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur une grille.
2. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\frac{2}{21}$.
3. Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève 1 € sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur?
4. Un joueur décide de générer 20 tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.
 - a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés.
 - b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , de l'évènement $(X = 5)$.
 - c. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , de l'évènement $(X \geq 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.