TS **PROBABILITE** feuille 31

EXERCICE 2 candidats n'ayant que l'enseignement obligatoire

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.

On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté *a*, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note *b* le numéro du jeton tiré.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de orthonormal de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées respectives (a,-5.1,-a) et (1+b,1,b).

Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à $\frac{1}{4}$.

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.

Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.

Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

Pour tout entier n, on désigne par :

A_n l'événement : "A gagne la n-ième partie"

B_n l'événement : "B gagne la n-ième partie"

C_n l'événement : "le jeu continue après la n-ième partie"

a. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$, et $p(C_1)$.

b. Exprimer $p(C_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et montrer que $p(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n$.

Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et en déduire que $p(A_n) = \frac{3}{16}\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$.

3. *a.* Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.