

EXERCICE 37**Polynésie septembre 2011**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . L'unité graphique est 1 cm.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6 - i$. On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Partie A

- 1) Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
- 2) En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{i(z - 2 + 3i)}{z - i}$$

- 1) Soit D le point d'affixe $z_D = 1 - i$. Déterminer l'affixe du point D' image du point D par f .
- 2) a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe $2i$.
b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).
- 3) Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $OM' = \frac{AM}{BM}$.
- 4) Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2} \quad \text{à } 2\pi \text{ près}$$

- 5) Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- 6) Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).