TS **NOMBRES COMPLEXES** *feuille 35*

EXERCICE 2 *(6 points)* candidats n'ayant que l'enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Soient les nombres complexes $a = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} + i\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$ et $z_0 = 6 + 6i$ d'image A_0.

Pour tout n entier naturel non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par $z_n = a^n z_0$..

Partie A

1. Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique. (0,5 point)

Écrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$. (0,5 point)

2. Exprimer z_3 puis z_7 en fonction de z_1 et a^2 ; en déduire l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle. (1 point)

3. Placer les points A_0, A_1, A_3 et A_7 images respectives des complexes z_0, z_1, z_3 et z_7.

(1 point)

Partie B

Pour tout n entier naturel, on pose $|z_n| = r_n$.

1. Montrer que, pour tout n de N, $r_n = 12\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$. (0,5 point)

2. En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. (1 point)

3. Déterminer la limite de la suite (r_n) et interpréter géométriquement le résultat obtenu. (0,5 point)

4. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $OA_p \leq 10^{-3}$ et donner alors une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u},\overrightarrow{OA_p}\right)$. (1 point)