SOMME DE VARIABLES ALEATOIRES

Exercice 8. Lors d'un salon d'artisanat

Lors d'un salon d'artisanat, un artisan ne vend que deux produits :

- le produit A au prix unitaire de 8 euros ;
- le produit B au prix unitaire de 12 euros.

On suppose que les quantités achetées par les clients sont indépendantes.
Le nombre de produits achetés par une personne s'arrêtant au stand de cet artisan est modélisé :

- pour le produit A par une v.a. X d'espérance 2 et variance 2 ;
- pour le produit B par une v.a. Y d'espérance 1 et variance 1.

1. Soit Z la v.a. égale au montant en euros de l'achat d'une personne s'arrêtant au stand.
Calculer l'espérance et la variance de Z.

2. On a remarqué que 350 personnes s'arrêtaient au stand chaque jour. Soit C la variable aléatoire qui, à une journée donnée, associe le chiffre d'affaires de l'artisan.

2. a. Déterminer l'espérance et la variance de C.

2. b. En utilisant l'inégalité de Bienaumé-Tchebichev, déterminer un minorant de la probabilité que le chiffre d'affaires soit strictement compris entre 9 000 et 10 600 euros.

Exercice 9. Un QCM

1. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de variances respectives 4 et 9.
L'écart-type de la variable aléatoire $Z = X + Y$ est égal à :
a. 13 **b.** $\sqrt{13}$ **c.** 5 **d.** $\sqrt{97}$

2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires de même loi donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	-2	-1	2	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,5	0,2	0,1

On suppose X_1 et X_2 indépendantes.
Soit la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$. Alors $P(Y = 4)$ est égal à :
a. 0,04 **b.** 0,09 **c.** 0,10 **d.** 0,14

3. Soit X une variable aléatoire d'espérance 150 et d'écart-type 20. On note S la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille 100 de X. On a :
a. $E(S) = 15\,000$ **b.** $E(S) = 150$
c. $V(S) = 40\,000$ **d.** $\sigma(S) = 20$

SOMME DE VARIABLES ALEATOIRES

4. Soit X une variable aléatoire d'espérance 100 et de variance 10. On note M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X. La plus petite valeur de l'entier n telle que $\sigma(M_n) < 0{,}3$ est :

a. 34 **b.** 111 **c.** 112 **d.** 1 112

5. Soit V et n deux nombres entiers naturels non nuls, et M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance 0 et de variance V. Pour quelles valeurs de V et n a-t-on $P\left(|M_n| < 3\right) \geqslant \frac{1}{18}$?

a. aucune **b.** $V = 2$ et $n = 1$

c. $V = 1$ et $n = 2$ **d.** $V = 18$ et $n = 36$

6. X est une variable aléatoire d'espérance 0 et d'écart-type 1. Pour tout réel strictement positif a, on a :

a. $P\left(|X| < a\right) \leqslant \frac{1}{a^2}$ **b.** $P\left(|X| < a\right) \geqslant \frac{1}{a^2}$

c. $P\left(|X| < a\right) \leqslant \frac{a^2 - 1}{a^2}$ **d.** $P\left(|X| < a\right) \geqslant \frac{a^2 - 1}{a^2}$