

EXERCICE 1 7 points

Principaux domaines abordés : fonctions, fonction logarithme ; convexité.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1.
 - a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
Interpréter graphiquement ce résultat.
 - b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2.
 - a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]0 ; +\infty[$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
En déduire le tableau de variations de f .
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4 ; 5]$.
4. On admet que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}.$$

- a. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
- b. On note A le point de coordonnées $(\sqrt{2} ; f(\sqrt{2}))$.
Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$. Soit M le point de coordonnées $(t ; f(t))$.
En utilisant la question 4. a, indiquer, selon la valeur de t , les positions relatives du segment $[AM]$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.