

EXERCICE 3 FONCTIONS, FONCTION LOGARITME

7 points

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)].$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. Justifier que $g(e)$ est strictement négatif.
2. Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
3.
 - a. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $g'(x) = -4x\ln(x)$.
 - b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
 - d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
4. Dédire de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1 ; \alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$.
Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1 ; \alpha]$.
2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et α .
 - a. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
 - b. En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; \alpha]$,

$$g(x) \geq \frac{-2}{\alpha-1}x + \frac{2\alpha}{\alpha-1}.$$

