

Exercice 3 7 points**Thèmes : fonction logarithme, suites****Les parties B et C sont indépendantes**

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x - x \ln x,$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.
 - b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,5 \\ u_{n+1} &= u_n - u_n \ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5; 1]$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
2.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
 - b. On note ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x \ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k , montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = e^{k-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k , on a : $x_k = y_k$.