

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2 \ln x}{x}.$$

1. On note g' la dérivée de g . Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}.$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

x	0	1	e	$+\infty$
Variations de g				

Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :

- la valeur $\frac{2}{e}$;
 - les variations de la fonction g sur son ensemble de définition;
 - les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = [\ln(x)]^2.$$

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

1. Démontrer que sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g .
2. À l'aide de la partie 1, étudier :
 - a. la convexité de la fonction f ;
 - b. les variations de la fonction f .
3.
 - a. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e .
 - b. En déduire que, pour tout réel x dans $]0; e]$:

$$[\ln(x)]^2 \geq \frac{2}{e}x - 1.$$