

EXERCICE 2 7 points**Thèmes : Fonction logarithme et suite**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x) + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. a. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

- b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0; +\infty[$ et les limites.
- c. Justifier que pour tout $x \in]0; 1[, f(x) \in]0; 1[$.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
- b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- c. En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geq x$$

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0; 1[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.
- b. Dédurre de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n) .
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.