Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

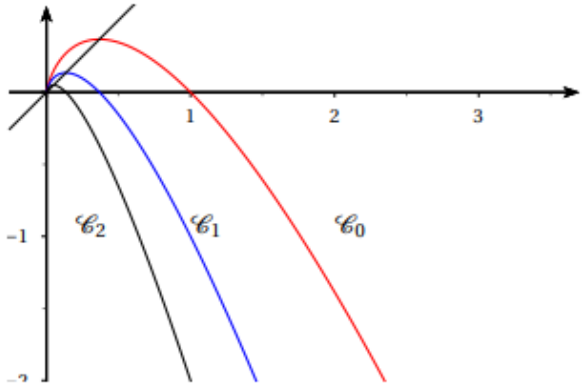
$$f_n(x) = -nx - x\ln x.$$

On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n, dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Les courbes $(\mathscr{C}_0)$, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ représentatives des fonctions f_0, f_1 et f_2 sont données.

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f_0(x) = -x\ln x$.

1. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f_0 sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que pour $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f_n'(x) = -n - 1 - \ln x$ où f_n' désigne la fonction dérivée de f_n.
2. (a) Démontrer que la courbe $(\mathscr{C}_n)$ admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) Prouver que le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.
   (c) Placer sur la figure en annexe les points A_0, A_1, A_2.
3. (a) Démontrer que la courbe $(\mathscr{C}_n)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n, dont l'abscisse est e^{-n}.
   (b) Démontrer que la tangente à $(\mathscr{C}_n)$ au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.
   (c) Placer sur la figure en annexe les points B_0, B_1, B_2.