

Exponentielle et logarithme népérien**(9 points)**

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = e^x - \ln x$

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On pourra utiliser le résultat : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

- 1) a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = xe^x - 1$
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
c) Montrer que l'équation $xe^x = 1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}
d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .
- 2) a) Déterminer la limite de f en 0.
b) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} \times \frac{\ln x}{x} \right)$.
En déduire la limite de f en $+\infty$
c) Déterminer f' et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
d) En déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
e) Montrer que f admet un minimum $m = f(\alpha)$ et que $m = \alpha + \frac{1}{\alpha}$
Justifier que : $2,32 \leq m \leq 2,34$
- 3) Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
- 4) Sur l'annexe 1, à rendre avec la copie, tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente T