

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2 \ln x$

- 1) Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$ et étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 2) Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de α au centième.
- 3) En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
- 2) Montrer que la distance de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ d'équation $y = 2x$ tend vers 0 en $+\infty$.
Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ .
- 3) Ecrire un algorithme permettant de déterminer l'entier $n \geq 2$ tel que $f(n) - 2n < 10^{-p}$ p étant un entier naturel. Déterminer alors la valeur de n pour $p = 3$
- 4) Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.
- 5) En déduire le tableau de variations de la fonction f .
- 6) Tracer la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ en annexe 1. On placera la tangente horizontale.