Exercice 1 (7 points)A) Etude d'une fonction auxiliaire.

g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(1 + x^2)$$

- 1) Démontrer que sur l'intervalle $[1; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et donner pour α un encadrement d'amplitude 10^{-1} .
- 2) Préciser le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

B) Etude d'une fonction

f est la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- 1) a) Quelle est la limite de $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ quand x tend vers 0 ?
 b) En déduire que f est dérivable en $x = 0$ et trouver une équation de la tangente T en $x = 0$ à la courbe (C) représentant f .
- 2) a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

- b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
- 3) b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

- b) En déduire les variations de f .
- c) Construire T puis (C) .