EXERCICE 13

Intégration par partie

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie.

1) $I = \int_1^e x \ln x \, dx$

4) $I = \int_0^1 (x+2)e^x \, dx$

2) $I = \int_1^{e^2} \ln t \, dt$

5) $I = \int_1^2 (t-2)e^{2t} \, dt$

3) $I = \int_0^\pi (x-1) \cos x \, dx$

6) $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$

Exercice 14**Suite**

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$$

- 1) a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
- b) Étudier les variations de la suite (x_n) .
- c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite, (x_n) ?
- 2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$x_n \leq \frac{1}{n+1}$$

- b) En déduire la limite de la suite (x_n) .
- 3) a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$$

- b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$
- 4) On admet que, pour tout entier naturel n non nul :

$$y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n$