On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle]0, +∞[par :

$$f_n(x) = \frac{1 + n\ln(x)}{x^2}$$

PARTIE A

I : Etude des fonctions f_n

1. Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur et n - 2 - 2n ln(x).
2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Etudier le signe de $f_n'(x)$
3. Déterminer la limite de f_n en +∞
4. Etablir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

II : Représentation graphique de quelques fonctions f_n

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) (unité graphique : 5 cm). On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

5. Tracer (C_2)et (C_3).
6.
    a. Calculer $f_{n+1}(x)$ - $f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?
    b. Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe (C_n)à partir de (C_2)et (C_3).

PARTIE B

Calculs d'aires

7. Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale :

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

8. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et (C_{n+1})et les droites d'équations x = 1 et x = e.
9. On note A_n l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe (C_n)et les droites d'équations y = 0, x = 1 et x = e.
    a. Calculer A_2.

b. Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation graphique de sa raison.

PARTIE C

Etude sur l'intervalle $]1;+\infty[$ de l'équation $f_n(x) = 1$**.**

Dans toute la suite, on prendra $n \geqslant 3$.

10.
   a. Vérifier que, pour tout n,

$$e^{\frac{n-2}{2n}} > 1 \text{ et } f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$$

   b. Vérifier que l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1;e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.

11. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet sur l'intervalle $\left[e^{\frac{n-2}{2n}};+\infty\right[$ exactement une solution notée α_n.
12. On se propose de déterminer la limite de la suite (α_n).
   a. Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que, pour $n > e^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) \geqslant 1$.
   b. En déduire que, pour $n \geqslant 8$, on a $\alpha_n \geqslant \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite
.