On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}\,x$ et pour tout entier naturel n non nul

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}\,x.$$

1. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.

2. **a.** Calculer $I_0 - I_1$.

b. En déduire I_1.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.

b. Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n.

4. Soit n un entier naturel non nul.

On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leqslant \frac{x^n}{1-x} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n}$.

b. En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n = I_0 - I_n$.

b. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.