

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1 il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13} .

Pour N allant de 1 à 12
 $U \leftarrow$
 Fin Pour

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$.

Voici les valeurs obtenues.

Pour $u_1 = 0,7$	Pour $u_1 = 0,8$
0,4	0,6
0,2	0,8
-0,2	2,2
-2	10
-13	59
-92	412
-737	3 295
-6 634	29 654
-66 341	296 539
-729 752	3 261 928
-8 757 025	39 143 135
-113 841 326	508 860 754

Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0,7$? Et si $u_1 = 0,8$?

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n , supérieur ou égal à 1, par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

On rappelle que le nombre e est la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à-dire que $e = e^1$.

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $F(x) = (-1-x)e^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0; 1]$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = xe^{1-x}$.
2. En déduire que $I_1 = e - 2$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

Utiliser cette formule pour calculer I_2 .

4. a. Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.

- b. Justifier que : $\int_0^1 x^n e \, dx = \frac{e}{n+1}$.
- c. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
- d. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Partie C

Dans cette partie, on note $n!$ le nombre défini, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par :

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1$$

$$\text{et si } n \geq 3 : n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$$

On a ainsi par exemple

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times (2 \times 1) = 3 \times 2!$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times (3 \times 2 \times 1) = 4 \times 3!$$

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8 \times (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 8 \times 7!$$

Et, plus généralement :

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n.$$

On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{et} \quad I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

2. On admet que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$.
- a. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,7$.
- b. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,8$.