

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathcal{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN .

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Pour tout x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, calculer $g'(x)$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ que l'on déterminera.
En donner une interprétation graphique.

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathcal{A}$ définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t - 3)] dt.$$

1. Hachurer sur le graphique donné en **annexe 1 (à rendre avec la copie)** le domaine dont l'aire est donnée par $\mathcal{A}(2)$.
2. Justifier que la fonction $\mathcal{A}$ est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathcal{A}(x)$.
4. Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathcal{A}(x) = 2$?