Partie A

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.

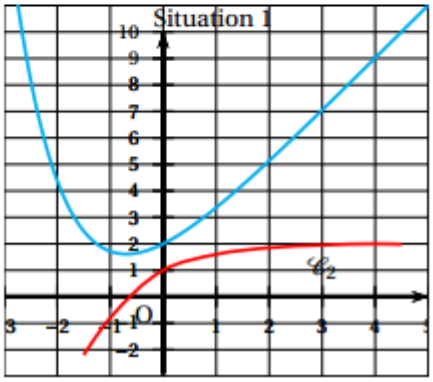
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.

Le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$.

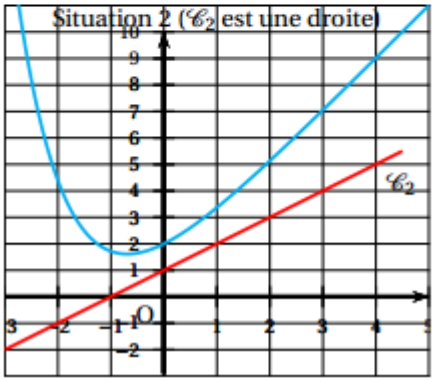
Le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$.

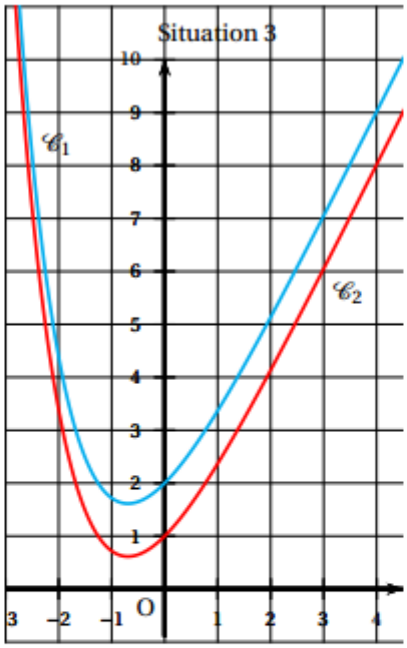
1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathscr{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

Situation 1



Situation 2 ($\mathscr{C}_2$ est une droite)





2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A.

3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = e^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

a. Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

b. Prouver que $a = 2$.

4. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

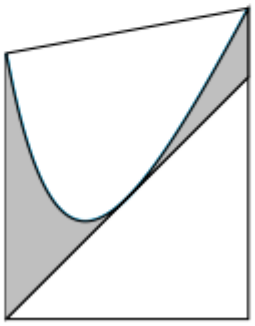
Partie B

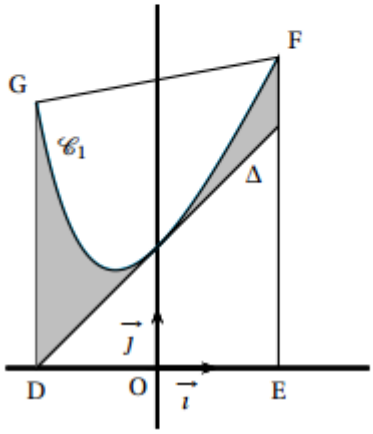
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x+2)$.

1. **a.** Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

   b. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_1$ par rapport à la droite Δ.

   La figure 2 ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathscr{C}_1$ et de la droite Δ, comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.





Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où :

- D est le point de coordonnées $(-2\,;\,0)$,
- E est le point de coordonnées $(2\,;\,0)$,
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathscr{C}_1$,
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathscr{C}_2$.

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).